دانشگاه تبریز

دانشکده علوم ریاضی

گروه ریاضی محض

پایان‌نامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشته‌ی

ریاضی محض، گرایش منطق ریاضی

عنوان

کوتاهترین تعریف یک عدد در حساب پئانو

استاد راهنما

سعید صالحی

استاد مشاور

حمید موسوی

پژوهشگر

حجت شیرزاده

۱۳۹۳

بِسْـــمِ اللّـــهِ الرِحْمـــنِ الرّحیـــــم

به نام آن خدایی که نام او راحتِ روح است و پیغام او مفتاحِ فتوح و سلام او در وقتِ صباح مؤمنان را صبوح و ذکر او مرهمِ دل مجروح و مِهر او بلانشینان را کشتیِ نوح است.

الهـــــی، به نام تو زبان‌ها گویا شده، به نام تو جان‌ها شیدا شده، بیگانه آشنا شده، کارها هویدا شده و راه‌ها پیدا شده است.

الهـــــی، ای خالق بی‌مدد و ای واحد بی‌عدد، ای اول بی‌هدایت و ای آخر بی‌نهایت، ای بخشنده بی‌منّت و ای مهربان بر خلایق، بذات لایزال خود و به صفات با کمال خود و به عزت جلال خود و به عظمت جمال خود، جان ما را صفای خود دِه، دل ما را هوای خود دِه، چشم ما را ضیای خود دِه و ما را آن دِه که آن بِه.

الهـــــی، در الهیت یکتایی، در اَحدیت بی‌همتایی، در ذات و صفات از خلق جدایی، متّصف به بهایی، متّحد به کبریایی، مایه هر بینوا و پناه هر گدایی، همه را خدایی.

الهـــــی، دلی دِه که طاعت افزاید، طاعتی دِه که به بهشت رهنمون آید، علمی دِه که در او آتش هوا نبود، عملی دِه که در او ریا نبود، دیده‌ای ده که غّر ربوبیّت تو بیند، دلی دِه که ذّل عبودیّت تو گزیند، نفسی دِه که حلقه بندگی تو در گوش کند، جانی دِه که زهر حکَمت را به طبع نوش کند.

الهـــــی، دانایی دِه تا از راه نیفتیم و بینایی دِه تا در چاه نیفتیم، دست گیر که دست‌آویزی نداریم، بپذیر که پای گریز نداریم.

الهـــــی، از وجود تو هر مفلسی را نصیبی است، از کرَم تو هر دردمندی را طبیبی است، از سِعت رحمت تو هر کسی را بهره‌ای است، از بسیاری بخشش تو هر نیازمندی را قطره‌ای است، بر سَر هر مؤمن از تو تاجی است، در دل هر مُحّب از تو سراجی است، هر شیفته‌ای را با تو سر و کاری است، هر منتظری را آخر روز دیداری است.

الهـــــی، گر در کمین سر تو به ما عنایت نیست، سرانجام قصه ما جزء حسرت نیست.

الهـــــی، کدام زبان به ستایش تو رسد؟ کدام خرد صفت تو برتابد؟ کدام شکر با نیکوکاری تو برابر آید؟ کدام بنده به گُزاردن عبادت تو رسد؟

الهـــــی، ادای شکر تو را هیچ زبان نیست و دریای فضل تو را هیچ کران نیست و سِرِ حقیقت تو بر هیچکس عیان نیست، هدایت کن بر ما رهی که بهتر از آن نیست.

گزیده‌ای از مناجات‌نامه خواجه عبدالله انصاری

تقدیم به:

دوستدارن علم و شهدای مرزبانی ناجا

به نام خالق حساب

و من لَمْ یَشْکُرِ الْمَخلوق لَمْ یَشْکُرِ الْخالِقْ.

حمد و سپاس ارزانی بارگاه حضرت احدیت که آثار قدرت او بر چهره روز روشن، تابان است و انوار حکمت او در دل شب تار، درفشان. آفریدگاری که خویشتن را به ما شناساند و درهای علم را بر ما گشود و عمری و فرصتی عطا فرمود تا بدان، بنده ضعیف خویش را در طریق علم و معرفت بیازماید. در آغاز وظیفه‌ی خود می‌دانم از زحمات بی دریغ استاد راهنمای خود، جناب آقای دکتر **سعید صالحی**، صمیمانه تشکر و قدردانی نمایم که قطعاً بدون راهنمایی‌های ارزنده‌ی ایشان این مجموعه به انجام نمی‌رسید. از جناب آقای دکتر**حمید موسوی** که زحمات مطالعه و مشاوره‌ی این رساله را تقبل فرمودند و در آماده سازی این رساله به نحو احسن اینجانب را مورد راهنمایی قرار دادند، کمال امتنان را دارم. از جناب آقای دکتر **جعفرصادق عیوضلو** که داوری این رساله را با نهایت دقت و صرف وقت زیاد انجام دادند، تشکر می‌نمایم. و همچنین از تمام دوستان دوران تحصیلم کمال قدردانی و تشکر را دارم. از کلیه دبیران دوران تحصیلم، اساتید گرامی بخصوص دکتر **مرتضی فغفوری** و همچنین دکتر **اصغر رنجبری** مدیرگروه ریاضی محض و نیز کارکنان محترم دانشکده‌ی علوم ریاضی و تحصیلات تکمیلی دانشگاه تبریز که در مدت تحصیلات دانشگاهی اینجانب زحمات فراوانی را متحمل شده‌اند، تشکر می‌نمایم. همچنین سپاس از کلیه اعضای خانواده‌ام بخصوص از **پدر و همسر** عزیزم، و همچنین **فرماندهان** عزیزم، به‌خصوص جناب سرهنگ زینال نژاد مهربان فرشتگانی که لحظات ناب باور شدن، غرور دانستن، جسارت خواستن، عظمت رسیدن و تجربه‌های زیبای زندگیم را مدیون حضور سبز آنها هستم.

حجت شیرزاده

۱۳۹۳

نام خانوادگی دانشجو: شیرزاده نام: حجت

عنوان: کوتاهترین تعریف یک عدد در حساب پئانو

استاد راهنما : سعید صالحی

استاد مشاور : حمید موسوی

مقطع تحصیلی: کارشناسی ارشد رشته: ریاضی محض گرایش: منطق ریاضی دانشگاه تبریز

دانشکده علوم ریاضی تاریخ فارغ التحصیلی: ۱۳۹۳ تعداد صفحات: ۳۶

کلید واژه‌ها: پارادوکس بِری، قضیه ناتمامیت گودل، حساب پئانو.

چکیده

قضیه‌ی ناتمامیت گودل، که از مهمترین نتایج ریاضیات قرن بیستم بود، توسط ایده‌ی فلسفی پارادکس دروغگو اثبات شد. گودل در مقاله‌ی اصلی‌اش اشاره می‌کند که به‌جای پارادوکس دروغگو می‌توان از دیگر پارادوکس‌ها مانند پارادکس بِری (کوچکترین عدد طبیعی توصیف‌ناپذیر) بهره جست. در این پایان‌نامه نشان داده می‌شود که کوتاهترین تعریف یک عدد توسط فرمولی مرتبه اوّل با یک متغیر آزاد محاسبه‌ناپذیر است؛ جایی که مفهوم فرمولی که یک عدد را تعریف می‌کند همان مفهومی است که توسط بولوس در اثبات آن برای قضیه‌ی ناتمامیت بکار برده شد.

فهرست مطالب

مقدمه

پارادوکس بِری چنین است: کوچک‌ترین عدد طبیعی که نمی‌توان آن را در زبان فارسی با کمتر از بیست کلمه توصیف کرد، کدام است؟ اوّلاً چنین عددی وجود دارد، چون که مجموعه‌ی اعداد طبیعی خوش‌ترتیب است. ثانیاً عبارت «کوچک‌ترین عدد طبیعی که نمی‌توان آنرا در زبان فارسی با کمتر از بیست کلمه توصیف کرد» خود توصیفی از یک عدد است که کمتر از بیست کلمه دارد!؟

فصل اوّل این پایان‌نامه که بر اساس [۲] نگارده شده است، از سه بخش تشکیل شده است.

بخش اوّل: استدال بر ضد اعتبار پارادوکس بِری؛

بخش دوّم: بحث‌های تاییدکننده برای نظریه ارایه شده در بخش اوّل؛

بخش سوّم: امتحان احتمال دوباره برقرار ساختن پارادوکس.

در فصل دوّم که بر اساس [۷] و [۴] نگارده شده است با استفاده از پارادوکس بِری اثبات جدیدی ازقضیه‌ی اوّل ناتمامیت را به شکل زیر اثبات می‌کنیم: الگوریتمی که خروجی آن شامل همه جملات درست حسابی باشد و شامل جملات نادرست نباشد وجود ندارد. در حقیقت با استفاده از روش بولوس، اثباتی از قضیه‌ی اوّل ناتمامیت ارائه می‌شود و از آن مقدمات قضیه‌ی دوّم ناتمامیت را به صورت نظریه مدلی نتیجه خواهیم گرفت. در فصل سوّم نشان داده می‌شود که این اثبات قضیه‌ی دوّم ناتمامیت، از اثبات کرایسل و یک کاربرد از قضیه‌ی تمامیت حسابی شده، الهام گرفته شده است. برای ساده‌تر شدن مسئله، نتایج را تنها روی حساب پئانو بیان می‌کنیم، چون این اثبات برای هر توسیع به طور بازگشتی اصل‌پذیر از حساب پئانو قابل انجام است.

آنچه در این بحث نهفته است کارهای زیادی است که برای ساختن یک فرمول مناسب مورد نیاز است. اثبات وجود فرمول کلیدی در «اثبات جدید» با پارادوکس بِری، حداقل نیازمند تلاش بسیار

است. علاقه‌ی ما به اثبات با پارادوکس بِری به خاطر ایجاز آن نیست بلکه این شیوه‌ی اثبات دلیلی دیگر و متفاوت برای ناتمامیت الگوریتم‌ها ارائه می‌دهد.

همچنین نشان داده می‌شود که کوتاهترین تعریف یک عدد توسط فرمول مرتبه اوّل با یک متغیر آزاد محاسبه‌ناپذیر است، جایی که مفهوم فرمولی که یک عدد را تعریف می‌کند همان مفهومی است که توسط بولوس در اثبات آن برای قضیه‌ی ناتمامیت بکار برده شد. پس نتیجه می‌گیریم که برهان بولوس برای قضیه‌ی اوّل ناتمامیت گودل، ساختاری (الگوریتمی) نیست. در پایان این فصل نیز با استفاده از قضیه‌ی تمامیت حسابی شده به اثبات قضیه‌ی دوّم ناتمامیت گودل اکتفا می‌کنیم.

فصل ۱

پارادوکس بِری

پارادوکس به معنای استدلالی است که حداقل در ظاهر درست است ولی در نهایت به یک نتیجه‌ی متناقض با تجربیات ما و یا حتی یک تناقض محض (گزاره‌ای مانند $P \wedge \neg P$) و یا گزاره‌ای که با اصول حساب در تناقض است مثلاً $(0 = 1)$ منجر می‌شود. البته مترجمان در ترجمه‌ی واژه‌ی **پارادوکس**[1] معادل‌هایی از قبیل تناقض‌نما، باطل‌نما، معما، خارق اجماع، تعارض در اقوال، تضاد، ناسازه، تنازع و ... را جایگزین نموده‌اند. امّا به نظر می‌رسد هیچ یک از آنها معنای دقیق پارادوکس را بیان نمی‌کنند. شاید به همین جهت است که برخی مترجمان ترجیح می‌دهند خود آن را بدون ترجمه در زبان فارسی بیاورند. در واقع، پارادوکس عبارت است از به دست آوردن یک جمله‌ی غیرقابل قبول از مقدمات مقبول و قواعد استنتاجی معتبر. به همین دلیل نیز، برای حل پارادوکس سعی می‌شود یا در صدق مقدمات و یا در اعتبار قواعد استنتاج خدشه وارد کرده و یا اینکه نتیجه را پذیرفته تنها توضیح داده شود که چرا غیرقابل قبول جلوه می‌نماید. به عبارتی دیگر، می‌توان پارادوکس را به این صورت تعریف نمود: آنچه که تناقض‌آمیز، باورنکردنی و خلاف انتظار و شهود ماست. یعنی آنچه به نظر درست می‌رسد ولی غلط است، به نظر غلط می‌رسد ولی درست است، یا به نظر غلط می‌رسد و واقعاً غلط است.

از نظر تاریخی پارادوکس‌ها در ایجاد انگیزه برای گسترش مرزهای دانش، تعمیق بینش، تعمیم شیوه‌های استدلال، افزایش دقت و وضع قوانین زبان شناختی جدید تأثیر شگرفی داشته‌اند. مثلاً پارادوکس‌های زنون در تکامل حسابان در قرن‌های ۱۷ تا ۱۹، پارادوکس‌های نظریه‌ی مجموعه‌ها مانند پاراداوکس‌های بورالی فورتی، کانتور و راسل در تدقیق نظریه‌ی (شهودی) مجموعه‌های کانتور، پارادوکس دروغگو در طرح برهان قضیه‌ی ناتمامیت گودل در قرن بیستم، پارادوکس بوچوفسکی در درک نارسایی‌های زبان و پارادوکس لامپ تامسون و پارادوکس تیر زنون در طرح مشکلات مفاهیم نظری در فیزیک نقش به‌سزایی داشتند.

ابزارهای متفاوتی برای رفع و رجوع پاراداوکس‌ها به کار گرفته شده‌اند. مثلاً **بوچفار**[2] در سال ۱۹۳۸ از منطق‌های سه ارزشی برای تحلیل پارادوکس‌ها استفاده کرد. همچنین می‌توان از فرازبان برای تفکیک جملات به لایه‌های مختلفی با نام‌های نوع اوّل، نوع دوّم و ... که روی آن‌ها درستی و

[1] Paradox

[2] D.A. Bochvar

نادرستی به‌طور مستقل تعیین می‌شوند استفاده کرد، کاری که مثلاً در مورد پارادوکس دروغگو که بیان می‌دارد «آنچه می‌گویم دروغ است» انجام شدنی است. برای مثال **آلفرد تارسکی**[۳] با تقسیم زبان به دو لایه‌ی زبان موضوعی که در مورد امور بیرون از زبان صحبت می‌کند و فرازبان که در مورد زبان موضوعی سخن می‌گوید، استدلال می‌کند که وقتی می‌گوییم «آنچه می‌گویم دروغ است»، عبارت «دروغ است» که متعلق به فرازبان است در لایهٔ موضوعی به کار رفته است و لذا از نظر ساختار منطقی اشکال دارد. با این حال، هربار که پارادوکسی در ریاضیات (وعلم) ظاهر می‌شود، برای حل آن باید فهم خود را از آن چه داریم بهبود بخشیم یا تصحیح کنیم یا قوانین زبان شناختی مناسب وضع کنیم و این دلیل برای قراردادن پارادوکس‌ها در کالبد ریاضیات و جدی گرفتن آن‌ها کافی به نظر می‌رسد.

بعضی پارادوکس‌ها نتایج نادرست حاصل از استدلال نادرست هستند؛ مانند پارادوکس دار غیرمنتظره، پارادوکس آشیل و لاک پشت زنون (فیلسوف قرن پنجم اهل الیا در جنوب ایتالیا و شاگرد پارامندیس) و پارادوکس استقراء؛ دسته‌ای از پارادوکس‌ها ناشی از اشکالاتی در اصول و تعاریف ما هستند. در این مورد می‌توان به پارداوکس دروغگو و پارادوکس سقراط و پارادوکس آلبرت ساکسونی اشاره کرد. پوانکاره و راسل دریافتند که بروز بسیاری از پارادوکس‌ها مانند پارادوکس راسل، پارادوکس کانتور، پارادوکس خودنامصداق، پارادوکس بِری و ... به علّت وجود تعریف‌های خودارجاعی در آنها است. بعضی پارادوکس‌ها خلاف شهود ما و باورنکردنی و در عین حال درست هستند، مانند پارادوکس‌های باناخ-تارسکی و روز تولد. تعدادی از پارادوکس‌ها ناشی از تعریف‌های مبهم هستند مانند پارادوکس‌های توده، ریچارد، تخته سیاه. بعضی پارادوکس‌ها مانند لامپ تامسون و اشتقاق به دو بخش ناشی از مشکلات فلسفی مربوط به مفاهیم نظری در فیزیک مانند حرکت، زمان و ... مربوطند (برای بحث بیشتر به منابع ضیاء موحدی، محمد صال مصلحیان مراجعه شود). در این مختصر ما صرفاً به بیان پارادوکس بِری که در این پایان‌نامه به کار رفته، بسنده می‌کنیم.

[۳] A. Tarski

پارادوکس بِری

بعضی جملات فارسی یک عدد طبیعی را توصیف می‌کنند. به عنوان مثال جمله «بزرگترین عدد طبیعی دو رقمی» یا «عددی که هم اوّل باشد و هم زوج» به ترتیب اعداد ۹۹ و ۲ را توصیف می‌کنند. این عبارت را در نظر بگیرید: «کوچک‌ترین عدد طبیعی که با کمتر از ۱۳ کلمه قابل توصیف نیست». آیا عددی که این عبارت بر آن دلالت می‌کند، با ۱۳ کلمه قابل توصیف است؟ اگر چنین باشد این یک تناقض است، زیرا بنابه تعریف نمی‌تواند چنین باشد و اگر نباشد باز یک تناقض داریم، زیرا خود عبارت فوق ۱۲ کلمه دارد. پس در واقع «کوچک‌ترین عدد طبیعی که با کمتر از ۱۳ کلمه قابل توصیف نیست» با کمتر از ۱۳ کلمه قابل توصیف است. زیرا که عبارت بالا تنها ۱۲ کلمه دارد. این پارادوکس در سال ۱۹۰۶ توسط برتراند راسل ارایه شده و آن را به **بِری**[۴] منسوب کرده است. این پارادوکس متعلق به پارادوکس‌های معنایی کشف شده در قرن ۱۹ و ۲۰ می‌باشد، همچنین **پارادوکس‌های ریچارد**[۵] و **خودنامصداق**[۶] را در بردارد.

۱.۱ استدلال بر ضد اعتبار پارادوکس بِری

برای شروع بحث، فرض می‌کنیم که تمامی واژه‌های زبان فارسی در یک واژه‌نامه استاندارد لیست شده‌اند و T مجموعه‌ی همه اعداد طبیعی است که می‌تواند در کمتر از ۱۳ کلمه از زبان فارسی توصیف شده باشد. از آنجایی که تنها تعداد متناهی واژه فارسی وجود دارد، پس فقط تعداد متناهی از ترکیبات کمتر از ۱۳ کلمه موجود است؛ یعنی T یک مجموعه‌ی متناهی است. مشخصاً اعداد طبیعی وجود دارند که از همه اعضای T بزرگتر هستند. بنابراین کوچکترین عدد طبیعی که در کمتر از ۱۳ کلمه قابل توصیف نیست وجود دارد. بنابه تعریف، این عدد متعلق به T نیست. با وجود این، ما آن را در ۱۲ کلمه توصیف کرده‌ایم، بنابراین آن متعلق به T است. ما با یک تناقض آشکاری

[۴] Berry

[۵] مجموعه‌ی تمام اعداد حقیقی بین ۰ و ۱ را نمی‌توان با تعداد متناهی از کلمه‌های یک زبان مشخص کرد.

[۶] خودنامصداق، کلمه‌ای است که در مورد خودش صدق نمی‌کند، مثلاً «آلمانی» خونامصداق است و «فارسی» خودمصداق.

روبرو هستیم. چرا که اگر ما وجود مجموعه‌ی T را بپذیریم استدلال ذکر شده در فوق عاری از ابهام خواهد بود. یقیناً به این نتیجه می‌رسیم که مجموعه‌ای همچون T نمی‌تواند وجود داشته باشد. فرض اشاره شده در بطن پارادوکس برِی این است که توصیفی که یک عدد طبیعی را مشخص می‌کند در توصیف عدد دیگر دوباره نمی‌تواند استفاده شده باشد؛ یعنی نمی‌توان اعداد ۳ و ۴ را با مجموعه‌ی یکسان از کلمات تعریف کرد در حالی که بین آنها تفاوت نیز قایل شده‌ایم. برای نشان دادن اینکه پارادوکس برِی نادرست است، ما باید یک متن و گروهی از عبارات کمتر از ۱۳ کلمه‌ای را ایجاد کنیم تا بتوانیم ثابت کنیم که هیچ کرانی برای عددی طبیعی که می‌تواند در کمتر از ۱۳ کلمه توصیف شده باشد وجود ندارد. برای انجام این کار از این حقیقت استفاده می‌کنیم که اعداد طبیعی (... ،۲ ،۱ ،۰) به‌صورت مجموعه‌هایی قابل تعریف هستند. این نخستین بار توسط **ددکیند**[۷] در سال ۱۸۸۸ آورده شده بود. پنج عدد نخست به شرح زیر تعریف شده‌اند:

$$0 = \emptyset$$

$$1 = \{0\}$$

$$2 = \{0, 1\}$$

$$3 = \{0, 1, 2\}$$

$$4 = \{0, 1, 2, 3\}$$

اوّلین عدد طبیعی، ۰، مجموعه‌ی تهی تعریف شده است (مجموعه‌ای که هیچ عضوی ندارد و با نماد $\emptyset$ نمایش داده می‌شود)، ۱ به عنوان مجموعه‌ی تك عضوی شامل ۰ تعریف شده است، ۲ به عنوان مجموعه‌ای شامل ۰ و ۱ تعریف شده است و ... . اکنون برای توصیف اعداد طبیعی آماده هستیم. ما توصیف آنها را در دنباله‌ای از مراحل ترتیب خواهیم داد. در مرحله ۱، ما اوّلین عدد طبیعی را توصیف خواهیم کرد، در مرحله ۲، دوّمین عدد طبیعی را توصیف خواهیم کرد و ... .

مرحله ۱: ما صفر را به‌صورت «مجموعه‌ی تهی، مجموعه‌ای است که شامل هیچ عضوی نیست و با نماد $\emptyset$ نشان داده می‌شود» توصیف می‌کنیم. (بنابراین $0 = \emptyset$).

مرحله ۲: یک را به‌صورت «مجموعه‌ای که شامل تنها عدد توصیف شده در مرحله قبل است»

[۷] R. Dedekind

توصیف می‌کنیم. (بنابراین $1 = \{0\}$).

مرحله ۳: دو را به‌صورت «مجموعه‌ای که شامل همه اعداد توصیف شده در مراحل قبل است» توصیف می‌کنیم. (بنابراین $2 = \{0, 1\}$).

مرحله ۴: سه را به‌صورت «مجموعه‌ای که شامل همه اعداد توصیف شده در مراحل قبل است» توصیف می‌کنیم. (بنابراین $3 = \{0, 1, 2\}$).

مرحله ۵: چهار را به‌صورت «مجموعه‌ای که شامل همه اعداد توصیف شده در مراحل قبل است» توصیف می‌کنیم. (بنابراین $4 = \{0, 1, 2, 3\}$).

$\vdots$

در مراحل فوق ما به‌طور منحصربفرد سه عدد طبیعی ۲ ، ۳ و ۴ را با استفاده از ترکیب یکسان کمتر از ۱۳ کلمه توصیف کرده‌ایم. از آنجایی که می‌توانیم این روش را تا بی‌نهایت ادامه دهیم، هیچ کرانی برای عدد طبیعی که به این روش در کمتر از ۱۳ کلمه قابل توصیف است وجود ندارد. بنابراین T، مجموعه‌ی تمامی اعداد طبیعی که می‌تواند در کمتر از ۱۳ کلمه توصیف شده باشد یک مجموعه‌ی نامتناهی است و پارادوکس برِی نادرست است.

۲.۱ بحث تایید کننده برای نظریه‌ی ارایه شده در بخش اوّل

تعاریف ارایه شده برای اعداد طبیعی در فوق دارای وابستگی متنی بوده و بایستی توصیفات قبلی آنها را نیز به عنوان بخش محذوف این توصیفات به حساب آوریم؛ ولی روندی که اعداد طبیعی را در بخش گذشته تعریف کرده‌ایم همانند روش مدرنی است که برای تعریف اعداد به‌صورت مجموعه‌هایی

استقرایی تعریف می‌شوند که این استقراء برای آنها ترتیبی را مشخص می‌نماید:

$$0 = \emptyset$$
$$1 = \{0\}$$
$$2 = \{0, 1\}$$
$$3 = \{0, 1, 2\}$$
$$4 = \{0, 1, 2, 3\}$$

هر تعریفی (به‌غیر از تعریف اوّل) وابسته به مفهوم تعریف هر عدد قبل از آن می‌باشد. به عنوان مثال نشان می‌دهیم، زمانی که یکی از تعاریف را حذف می‌کنیم، تعاریف بعدی دچار مشکل می‌شوند:

$$0 = \emptyset$$
$$1 = \{0\}$$
$$3 = \{0, 1, 2\}$$
$$4 = \{0, 1, 2, 3\}$$

اگر مجموعه‌ای که فقط شامل ۰ و ۱ می‌باشد وجود نداشت پس «۲» یک نماد بی‌معنی است و باقی تعاریف از اعداد بی‌معنی خواهند بود. به وضوح همه تعاریف به‌جز تعریف نخست، به تعاریف پیشین اشاره دارند و هیچ یک از تعاریف به غیر از تعریف اوّل، نمی‌تواند مستقل باشد. بنابراین می‌توان از توصیفات قبل به خوبی دفاع کرد چرا که با استفاده از مفهوم وابستگی، توصیف‌هایی درست‌تر از اکثر تعریفات مستقل برای اعداد طبیعی به دست می‌دهند. از آنجایی که نمی‌توانیم تعاریف اعداد طبیعی را بدون استفاده از تعاریف وابسته به متن ارایه دهیم، دلیلی موجه برای نپذیرفتن توصیفات وابسته به متن آنها نداریم. خصوصاً اینکه توصیفاتی وابسته به متن از اعداد ارایه دادیم.

۳.۱ امتحان احتمال دوباره برقرار ساختن پارادوکس

از آنجا که هدف، دوباره برقرار کردن پارادوکس است، لزومی ندارد به‌طور قراردادی توصیفات وابسته به متن را محدود کنیم و صرفاً به این احتیاج داریم که فقط آن‌ها را از مجموعه‌ای از خواص محروم کنیم و تمامی توصیفاتی که شامل کلمات وابسته مفهومی هستند همانند «قبلی» را حذف کنیم. برای مثال، به عنوان یک امکان، می‌توانیم کلمه‌ی «ناوابسته به متن» را به عنوان یک کلمه‌ی واحد به شمار آوریم و بگوییم که کوچکترین عدد طبیعی که در کمتر از ۱۳ کلمه‌ی ناوابسته به متن نمی‌تواند توصیف شده باشد، وجود دارد. این نسخه کاملاً ضعیف‌تر از پارادوکس اصلی است. برای اینکه این توصیف تناقض‌آمیز باشد، دو شرط می‌بایست برقرار باشد:

(۱) توصیف در کمتر از ۱۳ کلمه باشد.

(۲) شامل هیچ کلمه‌ی وابسته به متن نباشد.

در واقع با برقرار کردن دو شرط، می‌توانیم ابزاری را ایجاد نماییم که به وسیله آن از پارادوکس اجتناب شود، همانطور که در نظریه‌ی مجموعه‌ی **زرملو-فرانکل**[۸] (ZF) از پارادوکس راسل اجتناب شد. بحثی که در برابر پارادوکس ضعیف شده می‌توان مطرح کرد این است که یقیناً شامل حداقل یک کلمه‌ی وابسته مفهومی است زیرا اگر فرض کنیم که شامل چنین کلمه‌ای نیست، به یک تناقض می‌رسیم. البته نیازی نداریم به اینکه این بیان را به عنوان بحث ارایه دهیم. صرفاً به این نکته احتیاج داریم که یکی از کلمات حتماً وابسته به متن است. به وضوح مجبور نیستیم که چیزی را پارادوکس فرض کنیم در حالیکه یک جایگزین برای آن موجود است. بنابراین مانع برای اثبات آنکه در صورت جدید پارادوکس بِری به شکل «کوچکترین عددی که نتوان آن را در کمتر از ۱۳ کلمه‌ی غیروابسته به متن توصیف نمود» هیچ کلمه‌ی وابسته متنی در عبارت خود وجود ندارد، از بین می‌رود. روش این اثبات‌ها به نوعی تفسیر لغت مبهم «غیر وابسته به متن بودن» است، یعنی نشان می‌دهند که لغت «غیر وابسته به متن بودن» و بقیه لغات استفاده شده در توصیفات، مستقل از متن هستند. محققانی

[۸] اصل زیر مجموعه‌ی انتخابی زرملو در مورد وجود مجموعه‌ی $\{x \in A : S(x)\}$ است که شامل عضو x است فقط و فقط وقتی که x در شرایط زیر صدق کند: (۱) شرط $S(x)$ برقرار باشد. (۲) x عضوی از A باشد.

همچون **تیلر بورگ**[۹]، **چارلز پارسونز**[۱۰] و **جان باروایز**[۱۱] بر این عقیده‌اند که این لغات وابسته به متن هستند که ایجاد پارادوکس معنایی می‌کنند؛ به عنوان مثالی از یک لغت وابسته به متن، می‌توانیم لغت «توصیف شده» را در نظر بگیریم. بحثی که در بطن پارادوکس بِری قرار می‌گیرد ناشی از تجریداز یک درجه به یک درجه دیگری است. یعنی توصیفی از جملات از مرتبه پایین‌تر (قبلی) برای جملات از مرتبه بالاتر (بعدی). توصیف یک عدد طبیعی به‌صورت «توصیف‌ناپذیر بودن در کمتر از ۱۳ کلمه‌ی غیر وابسته به متن» یک توصیف مرتبه بالاتر است. یک توصیف غیرمستقیم براساس محدودیت‌های توصیفی از قبل فرض شده که این محدودیت‌ها (که در بحث ترکیبات متناهی از کلمات فارسی و مجموعه‌ی T برقرار بودند) باید قبل از اینکه توصیف را بپذیریم، توسط استدلال منطقی ارایه شده باشند. بحث منطقی متنی را ایجاد می‌کند که هم درون آن و هم به وسیله آن لغت «توصیف شده» بیان و توصیف می‌شود. بیرون این متن، این توصیف به‌صورت غیر وابسته وجود ندارد یعنی اگر بحث نادرست باشد (همان‌طور که در صورت اصلی پارادوکس اتفاق افتاد) این توصیف نیز نادرست خواهد بود. توصیفات مراتب پایین‌تر چنین وابستگی شدیدی ندارند. بنابراین لغت «توصیف شده» همزمان با حرکت بحث از مراتب پایین‌تر به مراتب تجرید بالاتر تغییر می‌کند.

[۹] T. Burge

[۱۰] Ch. Parsons

[۱۱] J. Barwise

فصل ۲

قضایای اوّل و دوّم ناتمامیت گودل

اثبات اصلی گودل برای قضیه‌ی اوّل ناتمامیت مبتنی بر پارادوکس دروغگو است. در واقع جوهر قضیه‌ی تاریخی گودل همان پارادوکس دروغگو است که از زمان یونان باستان شناخته شده بود. عبارت «این جمله نادرست است» را در نظر بگیرید. این جمله نه درست و نه نادرست می‌باشد. گودل حکم «این ادعا اثباتی ندارد» را مطرح کرده و با ترجمه آن به یک زبان صوری نشان داده که این حکم در هر نظریه که قادر به تعبیرحساب مقدماتی باشد، می‌تواند بیان شود. به عبارت دیگر، او نشان داد که اگر یک زبان صوری داشته باشیم به‌طوری که با استفاده از آن زبان بتوان درباره اعداد طبیعی و اعمال جمع و ضرب صحبت کرد آنگاه می‌توان عبارت «این ادعا اثباتی ندارد» را به این زبان ترجمه کرد. با توجه به اینکه هر دستگاه صوری که بخواهد کل ریاضیات را پوشش دهد خودبخود شامل اعداد طبیعی و اعمال بازگشتی مربوط به آن خواهد بود، پس ترجمه‌ی صوری این عبارت «این ادعا اثباتی ندارد» یکی از گزاره‌های آن دستگاه خواهد بود. اگر حکم قابل اثبات باشد پس حکم نادرست است امّا از آنجایی که در یک نظریه‌ی سازگار و صحیح هر حکمی که قابل اثبات باشد می‌بایست درست باشد، پس نتیجه می‌گیریم که اگر نظریه سازگار و صحیح باشد، آنگاه حکم قابل اثبات نیست. لذا حکم در واقع درست است. بنابراین در صورت سازگار و صحیح بودن نظریه، نمونه‌ای از یک حکم درست اثبات‌ناپذیر را داریم. سختی اثبات اصلی گودل برای قضیه‌ی اوّل ناتمامیت خودارجاعی بودن (یا قطری‌سازی) عبارت «این ادعا اثباتی ندارد» است.

قضیه ۱.۰.۲. (*قضیه‌ی اوّل ناتمامیت*) *فرض کنید که T یک نظریه‌ی صوری شامل حساب باشد، آنگاه یک جمله‌ی φ وجود دارد که اثبات‌ناپذیر بودن خودش را بیان می‌کند و به گونه‌ای است که:*

۱) *اگر T سازگار باشد، آنگاه $T \nvdash \varphi$*

۲) *اگر T، ωسازگار باشد، آنگاه $T \nvdash \neg\varphi$*

قضیه ۲.۰.۲. (*قضیه‌ی دوّم ناتمامیت*) *اگر T یک نظریه‌ی صوری سازگار شامل حساب باشد، آنگاه $T \nvdash Con_T$ جایی‌که Con_T بیانگر سازگاری T است.*

اثبات‌های متعددی برای قضیه‌ی ناتمامیت گودل ارایه شده‌اند. همچنان که گودل در مقاله‌ی اصلی خود اشاره می‌کند، به جای پارادوکس دروغگو می‌توان از دیگر پارادوکس‌ها نظیر پارادوکس بِری بهره جست. درستی استدلال‌هایی مانند استدلال گودل، از دیدگاه فیلسوفان (نه ریاضیدانان)

اغلب مورد سؤال بوده است و اوّلین تلاش برای حمایت از ادعای گودل، اثبات قضیه (بدون ارجاع به قطری‌سازی) با استفاده از پارادوکس‌های دیگر اخیراً باب شده است. در ادامه اثبات‌هایی از این قضایای تحسین برانگیز را خواهیم دید.

۱.۲ ω-سازگاری

تعریف ۱.۱.۲. یك مجموعه‌ی Σ از فرمول‌ها را «سازگار» گویند اگر از آن هیچ تناقضی حاصل نشود. به عبارت دیگر، فرمولی مثل α یافت نشود به‌طوری که هم $\Sigma \vdash \alpha$ و هم $\Sigma \vdash \neg\alpha$. در غیر این صورت مجموعه را «ناسازگار» گوییم. ⊛

تعریف ۲.۱.۲. نظریه‌ی T را ω-سازگار نامند هرگاه برای هر فرمول $\varphi(x)$ در زبان حساب، شرط زیر برقرار باشد: اگر برای هر $n \in \mathbb{N}$، $\quad T \vdash \varphi(\overline{n}) \quad$ آنگاه $\quad T \nvdash \exists x \neg\varphi(x)$.

به عبارت دیگر به‌طور غیر صوری نظریه‌ی T، ω-سازگار است اگر فرمول $\varphi(x)$ موجود نباشد به‌طوری که $\forall n \in \mathbb{N} : \quad T \vdash \neg\varphi(\overline{n})$ و در عین حال $T \vdash \exists x \varphi(x)$ که در آن $\overline{n} = \underbrace{SS...S(0)}_{n\text{بار}}$ می‌باشد. ⊛

ω-سازگاری یك نظریه طبق گزاره زیر، سازگاری آن نظریه را نتیجه می‌دهد امّا از سازگاری یك نظریه نمی‌توان ω-سازگاری آن را نتیجه گرفت.

گزاره ۳.۱.۲. *اگر نظریه‌ی T، ω-سازگار باشد آنگاه T سازگار است.*

برهان. فرض می‌کنیم فرمول $\mathsf{B}(x)$ فقط شامل یك متغیر آزاد x باشد و فرمول $\varphi(x)$ را به‌صورت $\varphi(x) = \mathsf{B}(x) \wedge \neg\mathsf{B}(x)$ در نظر می‌گیریم. می‌دانیم که $\mathsf{B}(x) \wedge \neg\mathsf{B}(x)$ یك تناقض می‌باشد پس $\neg\varphi(x)$ یك توتولوژی است. بنابراین $\forall n \in \mathbb{N} : \quad T \vdash \neg\varphi(\overline{n})$ و چون بنابه فرض T، ω-سازگار است پس $T \nvdash \exists x \varphi(x)$. بنابراین نظریه‌ی T سازگار است. □

مثال ۴.۱.۲. زبان $\mathcal{L}$ را به‌صورت $\mathcal{L} = \{0, S, \alpha\}$ که در آن S تابعی یک موضعی و α ثابت (مخالف صفر) است، در نظر گرفته و فرض می‌کنیم نظریه‌ی T با فرمولهای زیر اصل موضوعی شده باشد:

(1) $S(x) \neq 0$

(2) $S(x) = S(y) \longrightarrow x = y$

(3) $S(\alpha) = \alpha$

در این صورت برای هر تِرم t که فقط از 0 و S تشکیل شده است، با استقراء روی t در فرازبان ثابت می‌شود که $T \vdash \neg(S(\bar{t}) = \bar{t})$ (با استفاده از (1) و (2)) و از طرفی طبق شرط (3)، یعنی $S(\alpha) = \alpha$، خواهیم داشت $T \vdash \exists x(S(x) = x)$. بنابراین T، ω-سازگار نیست. ◎

۲.۲ اثبات جدید از قضیه‌ی ناتمامیت

اثبات با استفاده از برهان خلف بوده و دارای سه بخش اساسی است. برای شروع، یک سیستم صوری مطابق با معیارهای پیشنهادی زیر انتخاب می‌کنیم.

۱. جملات در این سیستم می‌توانند با اعداد طبیعی (معروف به اعداد گودل) رمز نگاری شوند. اهمیت این امر در آن است که مشخص کردن خصوصیات این جملات، مثل درستی و نادرستی آنها، معادل با مشخص کردن این است که آیا اعداد گودل‌شان ویژگی خاصی دارند یا نه. به این ترتیب، ویژگی‌های جملات می‌توانند با اعداد گودل‌شان بررسی شوند.

۲. در سیستم صوری، امکان ساختن جمله‌ای خود ارجاع که کد گودل آن همان عدد است، وجود دارد. این عمل با استفاده از تکنیکی به نام «قطری‌سازی» انجام می‌شود که به‌خاطر الهام گرفتن از روش قطری کانتور این نام را گرفته است.

۳. در سیستم صوری، این جملات اجازه‌ی نمایشی را در سیستم می‌دهند که نه اثبات‌پذیر است، نه رد شدنی؛ و به این ترتیب در حقیقت سیستم نمی‌تواند کامل باشد. از این‌رو فرض اوّلیه که سیستم پیشنهادی تمام باشد، غلط است.

بسیاری از قضایا اثبات‌های فراوانی دارند. بعد از ارایه‌ی اوّلین اثبات دقیق قضیه‌ی اساسی حساب توسط **گاوس**[۱] وی سه اثبات دیگر از آن ارایه داد؛ تعدادی از اثبات‌های دیگری نیز تاکنون

[۱] Gauss

پیدا شده‌اند. **قضیه‌ی فیثاغورث**[۲] که قدیمی‌تر و ساده‌تر از قضیه‌ی اساسی حساب است، تا امروز دارای صدها اثبات می‌باشد. اما آیا قضیه‌ی بزرگی با تنها یک اثبات وجود دارد؟

در این فصل یک اثبات جدید ساده از قضیه‌ی اوّل ناتمامیت گودل به شکل زیر ارایه خواهد شد: الگوریتمی که خروجی آن شامل همه جملات درست باشد و شامل هیچ جمله‌ی نادرستی نباشد، وجود ندارد. اثبات ما کاملاً با اثبات معمولی آن متفاوت است و پیش فرضمان تنها آشنایی مختصری با منطق ریاضی صوری است. اثبات مورد نظر با استفاده از **پارادوکس بِری**[۳] به انجام می‌رسد. نسخه‌های گوناگونی از پارادوکس بِری موجود است. مضمون نسخه‌ی اصلی آن که توسط برتراند راسل منتشر و به آقای ج. بِری کتابدار دانشگاه آکسفورد نسبت داده شد، این است که «کوچک‌ترین عدد صحیح توصیف‌ناپذیر با کمتر از بیست بخش، ۱۸ بخش است، از این‌رو کوچک‌ترین عدد صحیح توصیف‌ناپذیر با کمتر از بیست بخش، با ۱۸ بخش توصیف می‌شود» که یک تناقض است.

قبل از شروع باید راجع به الگوریتم‌ها و «جملات حسابی» و راجع به معانی «درست» و «نادرست» در متن حاضر صحبت کنیم. با «جملات حسابی» شروع می‌کنیم. زبان حسابی شامل نمادهای تابعی $+$ و $\times$ برای جمع و ضرب است و یک اسم 0 برای صفر، S برای تابع تالی، همچنین شامل علامت تساوی $=$ به اضافه‌ی علائم منطقی معمولی $\neg$ (نقیض)، $\wedge$ (و)، $\vee$ (یا)، $\rightarrow$ (اگر ... آنگاه ....)، $\leftrightarrow$ (... اگر و تنها اگر...)، $\forall$ (به ازای هر) و $\exists$ (وجود دارد) و پرانتزها می‌باشد. متغیرهای زبان حسابی عبارات x، $\acute{x}$، ... می‌باشند که از نماد x و $\acute{}$ تشکیل شده‌اند و فرض شده است که اعداد طبیعی $0, 1, 2, \ldots$ را بعنوان مقادیرشان اختیار کنند. متغیرها را با حروف x، y و غیره خلاصه‌نویسی خواهیم کرد. اکنون تقریباً به مفهومی از درستی و نادرستی در زبان حسابی رسیده‌ایم. به عنوان مثال،

$$\forall x \exists y \big(x = s(y)\big)$$

یک جمله‌ی غلط است، زیرا در اعداد طبیعی این‌طور نیست که هر عدد طبیعی دیگری مثل x تالی عدد طبیعی y است (مثل صفر که تالی هیچ عدد طبیعی نیست). از طرف دیگر

$$\forall x \exists y \big(x = (y+y) \vee x = s(y+y)\big)$$

یک جمله‌ی درست است، زیرا برای هر عدد طبیعی x عدد طبیعی y وجود دارد به‌طوری که $x = 2y$

[۲] Pythagorean Theorem

[۳] Berry's Paradox

یا $x = 2y + 1$. همچنین بسیاری از مطالب وجود دارد که می‌توانند در زبان حسابی بیان شوند. برای مثال کمتر بودن $x < y$ می‌تواند به‌صورت زیر تعریف شود:

$$\exists z\big(s(z) + x\big) = y$$

در واقع برای هدف ما، صوری بودن همان مقدار که درباره‌ی نحو و معنای زبان حسابی بوده، لازم است. منظور از الگوریتم یک روند محاسباتی (اتوماتیک، موثر، مکانیکی) از نوع معمول است. به‌طور مثال یک برنامه‌ی کامپیوتری در زبانی مانند `C`، `Basic`، `Lisp`، یک ماشین تورینگ، ماشین ثبت یا الگوریتم مارکوف.

فرض می‌کنیم که هر الگوریتمی لااقل یک خروجی داشته باشد. خروجی مجموعه‌ی چیزهایی است که الگوریتم بعد از انجام عملیات آن‌ها را چاپ می‌کند (البته ممکن است یک الگوریتم خروجی تهی داشته باشد). اگر الگوریتم، یک سیستم صوری باشد آنگاه خروجی آن تنها جملاتی است که در سیستم، قابل اثبات باشند.

اگر چه زبان حساب تنها شامل نمادهای عملیاتی s، $+$، $\times$ می‌باشد، امّا معلوم شده است که بسیاری از جملات ریاضی می‌توانند به‌صورت جملاتی در زبان حسابی بیان شوند؛ مانند گزاره‌ی اثبات نشده‌ی معروف **حدس گلدباخ**[۴] «هر عدد زوج بزرگتر از 2 را می‌توان به‌صورت مجموع دو عدد اوّل نوشت»:

$$\begin{aligned}&\forall x\big(S(0) < x \rightarrow \exists y \exists z\big[x + x = y + z \wedge\\&\forall u \forall v\{u \times v = y \vee u \times v = z \rightarrow u = s(0) \vee v = s(0)\}\big]\big)\end{aligned}$$

اگر الگوریتمی وجود داشت که خروجی آن، تنها همه جملات درست حسابی باشد (همان‌گونه که قضیه‌ی گودل به ما می‌گوید که چنین چیزی وجود ندارد)، راهی برای یافتن این که آیا هر یک از این گزاره‌های اثبات نشده درست‌اند یا نه وجود داشت. برای دیدن این مطلب فرض کنید چنین الگوریتمی موجود باشد؛ الگوریتم را شروع می‌کنیم، به سادگی صبر می‌کنیم تا ببینیم الگوریتم کدام یک از S و $\neg S$ را چاپ می‌کند؟ (اگر خروجی همه‌ی درست‌ها باشد و نادرستی نباشد، بالاخره باید S یا $\neg S$ ظاهر شود زیرا به‌طور حتم یا S درست است یا $\neg S$). امّا در این مورد که ممکن است زیاد

[۴] Goldbach's Conjecture

طول بکشد تا الگوریتم به جوابی برای سؤال مورد علاقه‌ی ما برسد نگرانی وجود ندارد. همین‌طور که در ادامه نشان خواهیم داد هیچ الگوریتمی وجود ندارد که این‌چنین عمل کند.

برای نشان دادن اینکه الگوریتمی وجود ندارد که خروجی آن شامل همه جملات درست حسابی باشد و هیچ نادرستی نداشته باشد، فرض می‌کنیم M الگوریتمی باشد که خروجی آن شامل هیچ جمله‌ی نادرست حسابی نیست. نشان خواهیم داد که چه‌گونه یک جمله‌ی درست حسابی بیابیم که در خروجی M نباشد؛ و این مسئله، قضیه را به اثبات خواهد رساند.

برای هر عدد طبیعی n ، $\bar{n}$ را عبارت شامل 0 به همراه n تا نماد تالی S در نظر می‌گیریم. برای مثال $SSS0$، $\bar{3}$ است. توجه کنید که عبارت $\bar{n}$ عبارتی برای بیان عدد n است. یک تعریف دیگر نیاز داریم: می‌گوییم فرمول $F(x)$ عدد طبیعی n را نامگذاری می‌کند اگر جمله‌ی زیر در خروجی M باشد:

$$(\forall x)\big(F(x) \leftrightarrow x = \bar{n}\big)$$

بنابراین، برای مثال اگر

$$(\forall x)\big(x + x = SSSS0 \leftrightarrow x = SS0\big)$$

در خروجی M باشد، آنگاه فرمول $x + x = SSSS0$ عدد ۲ را نامگذاری می‌کند. هیچ فرمولی دو عدد متفاوت را نامگذاری نمی‌کند. برای اینکه اگر هر دو فرمول $(\forall x)(F(x) \leftrightarrow x = \bar{n})$ و $(\forall x)(F(x) \leftrightarrow x = \bar{p})$ درست باشند، آنگاه داریم $(\forall x)(x = \bar{n} \leftrightarrow x = \bar{p})$ و از آنجا $\bar{n} = \bar{p}$، پس عدد n باید با عدد p مساوی باشد. بعلاوه برای هر عدد i تعداد متناهی فرمول مختلف وجود دارد که شامل i نماد است. (چون 16 تا نماد ابتدایی از زبان حسابی وجود دارد، پس حداکثر 16^i فرمول شامل i نماد وجود دارد). بنابراین برای هر i تنها تعداد متناهی عدد نامگذاری شده توسط فرمول‌های i نمادی وجود دارد. پس برای هر m تنها تعداد متناهی عدد توسط فرمول‌های شامل کمتر از m نماد نامگذاری شده‌اند. نتیجه می‌شود که بعضی اعداد با فرمول کمتر از m نماد نامگذاری نمی‌شوند؛ و به این ترتیب کوچک‌ترین عدد که با فرمولی کمتر از m نماد نامگذاری نمی‌شود، وجود دارد.

$\mathbf{C}(x, z)$ را فرمولی از زبان حسابی بگیرید به‌طوری که فرمول $\mathbf{C}(x, z)$ می‌گوید که «x عددی است که توسط فرمولی شامل z تا نماد نامگذاری شده است». واقعیت تکنیکی که نیاز داریم و در بالا ذکر شده این است که برای هر الگوریتم M از هر گونه که باشد، چنین فرمول $\mathbf{C}(x, z)$ای وجود

دارد. طرح اوّلیه‌ی دستور ساخت $\mathbf{C}(x,z)$ در نکته ۳ دو صفحه‌ی بعد آمده است.

اکنون $\mathbf{B}(x,y)$ را برابر فرمول $\exists z\big(z<y\wedge \mathbf{C}(x,z)\big)$ قرار دهید. $\mathbf{B}(x,y)$ می‌گوید که «x توسط فرمولی با کمتر از y تا نماد نامگذاری شده است».

$\mathbf{A}(x,y)$ را فرمول $\neg\mathbf{B}(x,y)\wedge\forall z\big(z<x\to\mathbf{B}(z,y)\big)$ در نظر می‌گیریم. $\mathbf{A}(x,y)$ می‌گوید که «x کوچک‌ترین عدد نامگذاری نشده توسط فرمولی با کمتر از y تا نماد است».

عدد k را تعداد نمادهای $\mathbf{A}(x,y)$ در نظر بگیرید. داریم $k>3$. بالاخره $F(x)$ را فرمول $\exists y\big(y=(\bar{10}\times\bar{k})\wedge\mathbf{A}(x,y)\big)$ قرار دهید. $F(x)$ می‌گوید که «x کوچک‌ترین عدد نامگذاری نشده توسط فرمولی با کمتر از $10k$ تا نماد است». حال F شامل چه تعداد نماد است؟ خوب، $\bar{10}$ شامل 11 تا نماد، $\bar{k}$ شامل $k+1$ تا، $\mathbf{A}(x,y)$ شامل k تا و به اضافه 12 تای دیگر (چون y مختصر شده‌ی x' است)، در کل $2k+24$ تا نماد می‌شود. چون $k>3$، $2k+24<10k$ و $F(x)$ کمتر از $10k$ تا نماد دارد.

دربالا دیدیم که برای هر m، یک کوچک‌ترین عدد وجود دارد که توسط هیچ فرمولی با کمتر از m تا نماد نامگذاری نمی‌شود. عدد n را کوچک‌ترین عدد برای $m=10k$ با خصوصیات بالا در نظر بگیرید. آنگاه n با $F(x)$ نامگذاری نمی‌شود؛ به عبارت دیگر $(\forall x)\big(F(x)\leftrightarrow x=\bar{n}\big)$ در خروجیM نیست. امّا $(\forall x)\big(F(x)\leftrightarrow x=\bar{n}\big)$ یک جمله‌ی درست است، چون n کوچک‌ترین عددی است، که توسط هیچ فرمولی با کمتر از $10k$ تا نماد نامگذاری نمی‌شود. بنابراین یک جمله‌ی درست یافتیم که در خروجی M نیست، یعنی $(\forall x)\big(F(x)\leftrightarrow x=\bar{n}\big)$ و اثبات تمام است.

چند تبصره در ارتباط با اثبات:

۱.در اثبات ما نمادها «بخش‌ها» (یا «سیلاب‌ها») هستند و درست مثل «نوزده» که شامل دو بخش است و کوچکتر از ۱۹ است، ترم $(\bar{10}\times\bar{k})$ شامل $k+15<10k$ تا نماد است.

۲. **جورج کرایسل**[5] در یادداشت خود از زندگی‌نامه و تجارب **کورت گودل**[6]، گزارش می‌دهد که گودل، موفقیت خود را خیلی نتیجه‌ی نوآوری‌های ریاضیات نمی‌داند؛ بلکه نتیجه‌ی توجه به

[5] G. Kreisel

[6] K. Gödel

تفاوت‌های فلسفی می‌داند. **جورج شایتین**[۷] این‌گونه بیان می‌کند که یکی از اثبات‌های ناتمامیت خودش به‌جای پارادوکس دروغگوی **اپیمنیدس**[۸] «آنچه اکنون دارم می‌گویم درست نیست»، شبیه به پارادوکس بِری است. در اثبات‌های شایتین از مفهوم پیچیدگی یک عدد طبیعی، یعنی کوچک‌ترین عدد دستورالعمل، درجدول ماشین هر ماشین تورینگی که آن عدد را در خروجی چاپ می‌کند و مفاهیم متنوع دیگر نظریه اطلاعات استفاده شده است. از آنجایی که توضیحات کرایسل و شایتین، که نویسنده آنها را کمابیش همزمان خواند، انگیزه‌ای به وجود نیاوردند، هیچ یک از آن مفاهیم در اثبات مورد استفاده قرار نگرفته‌اند.

۳. $\mathbf{C}(x,z)$ را فرمول

$$\exists y\big(\mathsf{F}urmula(y) \wedge \mathsf{L}ength(y) = z \wedge \mathsf{P}rovable_{PA}(\ulcorner(\forall u)(y \leftrightarrow u = \bar{x})\urcorner)\big)$$

قرار می‌دهیم. که در آن

- $\mathsf{F}urmula(x)$ به معنی «x عدد گودل یک فرمول است».
- $\mathsf{L}ength(x)$ به این معنی که «طول فرمول عدد گودل x است».
- محمول $\mathsf{P}rovable_T(y)$ به معنی «فرمول با عدد گودل y در T قابل اثبات است».

طرح اوّلیه‌ی دستورالعمل فرمول $\mathbf{C}(x,z)$ که می‌گوید «x عددی است که توسط فرمولی با z تا نماد نامگذاری می‌شود» را شرح می‌دهیم. نکته‌ای مهم این است که الگوریتم‌های شبیه M می‌توانند به عنوان عملگر روی « عبارت»، یعنی دنباله‌های متناهی از نمادها، فرض شوند. همان‌گونه که کدهای ASCII نمادها می‌توانند با اعداد رمزنگاری شوند (منطق‌دان‌ها اغلب این کدهای عددی را اعداد گودل می‌نامند). ترفندهای خاص نظریه‌ی اعداد قادر به کد کردن عبارات به‌صورت اعداد و انجام عملیات روی عبارات به‌صورت عملیات روی اعدادی که آنها را کد می‌کنند، می‌باشد. به علاوه این عملیات عددی همه می‌توانند بر حسب جمع، ضرب و نمادهایی از منطق تعریف شوند. به این ترتیب بحث نمادها، عبارات (و دنباله‌ی متناهی از عبارات و غیره) می‌توانند در زبان حسابی به‌صورت مبحث اعداد طبیعی که آنها را کد می‌کنند، کدگذاری شوند. برای ساختن یک فرمول

[۷] G. Chaitin

[۸] Epimenides

که بیانگر این مطلب باشد که n با فرمولی شامل i تا نماد نامگذاری شده است، می‌توان فرمولی را نوشت که می‌گوید یک دنباله از عملیات الگوریتم Mای (که روی عبارات عمل می‌کند) وجود دارد که عباراتی شامل $\forall$، x، (i تا نماد از بعضی از فرمول‌های $F(x)$ از زبان حسابی، $\leftrightarrow$، x، $=$، n نماد بلافاصل s، 0 و ...) را تولید می‌کند. عددگذاری گودل و ترفندهای نظریه‌ی اعداد اجازه می‌دهند چنین بیانی از نمادها، دنباله‌ها و عملیات روی M به‌صورت فرمول‌هایی از حساب رمزنگاری شوند.

۴. هم اثبات ما و هم اثبات استاندارد، از عددگذاری گودل استفاده می‌کنند. به علاوه درستی‌های اثبات‌ناپذیر در اثبات ما و در اثبات استاندارد آن، می‌توانند به عنوان جایگزین یک اسم برای یک عدد در یک فرمول خاص به‌دست آمده باشند. به هر حال یک تفاوت مهم بین دو اثبات وجود دارد. در اثبات معمولی، عددی که اسم آن جایگزین شده است، کد فرمولی است که در آن جایگذاری شده است و در اثبات ما، عدد منحصر به فردی است که فرمول در آن درست است. با این تفاوت بیان این مطلب که اثبات ما متفاوت با اثبات معمول آن بوده و شامل قطری سازی نمی‌شود، به نظر موجه می‌رسد.

۳.۲ یادداشتی در مورد اثبات بولوس از قضیه‌ی ناتمامیت

با استفاده از پارادوکس بِری قضیه‌ی ناتمامیت گودل به شکل زیر ارایه شد: الگوریتمی که خروجی آن شامل جملات درست باشد و شامل جملات نادرست نباشد، وجود ندارد؛ یعنی به‌طور بازگشتی اصل‌پذیر نیست. اثبات بولوس از بسیاری جهات قابل توجه است. برای مثال، همان‌طور که بیان شد، شامل هیچ استدلال قطری نیست. به این ترتیب، نسخه‌ی فوق از قضیه‌ی ناتمامیت ضعیف‌تر از قضیه‌ی اوّل ناتمامیت گودل است. که می‌گوید «هر توسیع ω-سازگاری به‌طور بازگشتی اصل‌پذیر از حساب پئانو ناتمام است.» از اینرو، قضیه دوّم ناتمامیت از اثبات بولوس نتیجه نمی‌شود. با استفاده از روش بولوس اثباتی از قضیه‌ی اوّل ناتمامیت ارایه شد و اکنون از آن دوّمین قضیه‌ی ناتمامیت را به‌صورت نظریه‌ی مدلی نتیجه خواهیم گرفت. اثبات دوّمین قضیه‌ی ناتمامیت، از اثبات کرایسل [۹] و یک کاربرد از قضیه‌ی تمامیت حسابی شده، الهام گرفته شده است. برای ساده‌تر شدن مسئله، نتایج را تنها روی حساب پئانو بیان می‌کنیم چون این اثبات برای هر توسیع به‌طور بازگشتی اصل‌پذیر

از حساب پئانو قابل انجام است.

۴.۲ مقدمات اثبات قضیه‌ی دوّم ناتمامیت

فرض کنیم $\mathcal{L}_{PA} = \{+,.,0,1,<\}$ زبانی از مرتبه اوّل درحساب باشد. حساب پئانو که با PA نشان داده می‌شود، نظریه‌ای در $\mathcal{L}_{PA}$ است که شامل اصول نیم‌حلقه‌های به‌طور گسسته مرتب یکدار و طرح اصل استقرا است.

- **اصول پئانو** (نظریه‌ی اصل موضوعی حساب):

$$(1) \quad (\forall x)(\forall y)\big(S(x) = S(y) \to x = y\big)$$

$$(2) \quad (\forall x)\big(S(x) \neq 0\big)$$

$$(3) \quad (\forall x)\big(x + 0 = x\big)$$

$$(4) \quad (\forall x)\big(x + S(y) = S(x + y)\big)$$

$$(5) \quad (\forall x)(\forall y)\big(x \times S(y) = x \times y + x\big)$$

$$(6) \quad (\forall x)\big(x \times 1 = x\big)$$

$$(7) \quad \varphi(0) \wedge (\forall x)[\big(\varphi(x) \to \varphi\big(S(x)\big)\big)] \to (\forall x)\varphi(x)$$

تعریف ۱.۴.۲ . یک فرمول φ، در $\mathcal{L}_{PA}$، Δ_0 نامیده می‌شود هرگاه شامل هیچ سور نامحدودی نباشد و Σ_1 نامیده می‌شود هرگاه φ فرمولی به فرم $(\exists x_1....\exists x_k)\psi$ برای Δ_0 فرمول ψ باشد. توجه داریم که در PA هرگاه φ یک Σ_1 فرمول باشد، $(\exists x < t)\varphi$ و $(\forall x < t)\varphi$ نیز معادل Σ_1 فرمول می‌باشند.

تعریف ۲.۴.۲ . یک رابطه‌ی $R \subseteq \mathbb{N}^k$ شمارای کارآمد است اگر و تنها اگر حداقل یک Σ_1 فرمول مانند $\varphi(x_1, x_2, ..., x_k)$ وجود داشته باشد به‌طوری که به ازای هر $n_1, n_2, ..., n_k \in \mathbb{N}$،

$$(n_1, n_2, ..., n_k) \in R \Leftrightarrow \mathbb{N} \models \varphi(n_1, n_2, ..., n_k)$$

گزاره ۳.۴.۲ . *برای هر $n, m \in \mathbb{N}$ گزاره‌های زیر در PA اثبات‌پذیرند:*

$$(1) \quad \bar{m} + \bar{n} = \overline{n + m}$$

$$(2) \quad \bar{m} \times \bar{n} = \overline{n \times m}$$

(3) $(\forall m \neq n) \quad \bar{m} \neq \bar{n}$

(4) $x \leq \bar{n} \equiv x = \bar{0} \vee x = \bar{1} \vee ... \vee x = \bar{n}$

(5) $x \leq \bar{n} \vee \bar{n} \leq x$

برهان. رجوع شود به قضیه‌ی ۱.۶ مرجع [۶]. $\square$

گزاره ۴.۴.۲. *برای هر Σ_1 جمله‌ی φ در $\mathcal{L}_{PA}$*

(الف) اگر φ درست باشد آنگاه $PA \vdash \varphi$.

(ب) اگر PA ، ω-سازگار بوده و $PA \vdash \varphi$ آنگاه φ درست است.

برهان. (الف) رجوع شود به قضیه ۱.۸ مرجع [۶].

(ب) برای اثبات این قسمت فرض خلف می‌کنیم که φ درست نباشد یعنی $\mathbb{N} \nvDash \varphi$. در اینصورت $\mathbb{N} \models \neg\varphi$. با توجه به‌صورت گزاره، φ، یک Σ_1 فرمول است، پس $\varphi \equiv \exists \bar{x} \theta(\bar{x})$ که نتیجه می‌دهد $\mathbb{N} \models \forall \bar{x} \neg\theta(\bar{x})$. در اینصورت $\forall \bar{n} \in \mathbb{N} \quad \mathbb{N} \models \neg\theta(\bar{n})$ امّا از آنجاکه θ، یک Δ_0 فرمول است، $\neg\theta$ نیز یک Δ_0 فرمول و در نتیجه Σ_1 فرمول درست است. با استفاده از قسمت اوّل داریم

$$\forall \bar{n} \in \mathbb{N} \quad PA \vdash \neg\theta(\bar{n})$$

و نیز بنا به فرض، $PA \vdash \exists \bar{x} \theta(\bar{x})$ که با ω-سازگاری PA در تناقض است. پس فرض خلف باطل و حکم ثابت می‌شود. $\square$

فرض کنید $\mathsf{Pr}_{PA}(x)$ یک Σ_1 فرمول باشد که رابطه‌ای بازگشتی مقدماتی را مشخص می‌کند، به‌طوری که x، عدد گودل فرمولی است که در PA اثبات‌پذیر است.

سپس $\mathsf{Con}(PA)$ و $\omega-\mathsf{Con}(PA)$ را به‌صورت زیر تعریف می‌نماییم.

$\mathsf{Con}(PA)$ و $\omega-\mathsf{Con}(PA)$ جملاتی در $\mathcal{L}_{PA}$ می‌باشد با این مفهوم که PA به ترتیب سازگار و ω-سازگار است. برای مثال

$$\mathsf{Con}(PA) \Longleftrightarrow \neg\mathsf{Pr}_{PA}(\ulcorner 0 = 1 \urcorner)$$

و

$$\omega-\mathsf{Con}(PA) \Longleftrightarrow (\forall x)\big((\forall y)\mathsf{Pr}_{PA}\big(x(\bar{y})\big) \to \neg\mathsf{Pr}_{PA}\big((\exists y)\neg x(y)\big)\big)$$

که در آن $\bar{y}$ عدد یا شماره‌ی y را مشخص می‌کند. (یعنی $\bar{y} = \underbrace{ss...s(0)}_{y}$ وقتی s، y بار تکرار می‌شود). زمانی که $\mathsf{Pr}_{PA}(x)$ یک Σ_1 فرمول باشد، نتیجه زیر برقرار است:

نتیجه ۵.۴.۲. *برای هر فرمول φ در $\mathcal{L}_{PA}$:*

(الف) $PA \vdash \mathsf{Pr}_{PA}(\ulcorner\varphi\urcorner)$ *هرگاه φ در PA اثبات‌پذیر باشد.*

(ب) فرمول φ در PA اثبات‌پذیر است هرگاه PA، ω- سازگار باشد و $PA \vdash \mathsf{Pr}_{PA}(\ulcorner\varphi\urcorner)$.

برهان. (الف) فرض خلف می‌کنیم که $PA \nvdash \mathsf{Pr}_{PA}(\ulcorner\varphi\urcorner)$. آنگاه با توجه به گزاره‌ی ۴.۴.۲ $\mathsf{Pr}_{PA}(\ulcorner\varphi\urcorner)$ درست نیست. پس از تعریف $\mathsf{Pr}_{PA}(\ulcorner\varphi\urcorner)$ به این نتیجه می‌رسیم که $PA \nvdash \varphi$. این یک تناقض است پس فرض خلف باطل و حکم اثبات می‌شود.

(ب) با توجه به فرض و همچنین با استفاده از گزاره‌ی ۴.۴.۲ $\mathsf{Pr}_{PA}(\ulcorner\varphi\urcorner)$ باید درست باشد، پس با توجه به تعریف $\mathsf{Pr}_{PA}(\ulcorner\varphi\urcorner)$ داریم، $PA \vdash \varphi$. □

متذکر می‌شویم که گزاره ۴.۴.۲ و نتیجه ۵.۴.۲ می‌توانند در PA اثبات شوند. یعنی برای هر Σ_1جمله‌ی φ در زبان $\mathcal{L}_{PA}$، داریم

$$PA \vdash \varphi \to \mathsf{Pr}_{PA}(\ulcorner\varphi\urcorner)$$

$$PA \vdash \omega - \mathsf{Con}(PA) \to (\mathsf{Pr}_{PA}(\ulcorner\varphi\urcorner) \to \varphi)$$

فصل ۳

کوتاهترین تعریف یک عدد در حساب پئانو

۱.۳ پیشینه

بارِوایز [۱] اثبات بولوس از قضیه‌ی اول ناتمامیت گودل را «برهانی بسیار دوست داشتنی» و نیز «مستقیم‌ترین اثباتی که تا به حال از این قضیه دیده‌ایم» توصیف کرده است. در برهان وی از قضیه ناتمامیت گودل نه تنها از پارادوکس دروغگو استفاده نشده، بلکه از پارادوکس بِری استفاده شده است. در هر دو روش، از فن رمزنگاری توابع بازگشتی درحساب پئانو یا سیستم‌های مشابه استفاده شده است. امّا برهان بولوس مستقیم و به دور از قطری سازی است. در اثبات استاندارد از قضیه‌ی ناتمامیت گودل، جمله‌ی اثبات‌ناپذیر به وسیله جایگذاری عدد گودل فرمول φ درون خود فرمول φ که همان عددی است که به ازای آن φ درست است، به‌دست می‌آید. در حالی که در اثبات بولوس از تعریف «کوچک‌ترین عدد تعریف‌ناپذیر با کمتر از n نماد» استفاده می‌شود.

حال این سؤال مطرح می‌شود که چرا پیدا کردن کوتاهترین تعریف برای یك عدد مشکل است؟ ما نشان خواهیم داد هر عدد n را می‌توان توسط فرمولی با طول کمتر از $3(n+1)$ تعریف کرد، ولی کوتاهترین تعریف عدد n را نمی‌توان به‌طور کارآمد پیدا کرد. این توسط بحث دوست داشتنی بِری نشان داده شده است، پس تابع کوتاهترین تعریف عدد n از بالا کراندار با $3(n+1)$ بوده ولی محاسبه‌پذیر نیست. در اینجا به‌طور قردادی، $\mathcal{L}$ «یك زبان مرتبه اوّل» بوده و $\vdash$ نمایانگر «نتیجه می‌دهد» و $|\varphi|$ نشانگر «طول فرمول φ» است.

تعریف ۱.۱.۳. فرض کنید $\mathcal{L}$ زبان مرتبه اوّل حساب پئانو (یا معادلاً دستگاهی با اصول موضوعه قادر به رمزنگاری توابع بازگشتی) باشد. فرمول $\varphi(x_1)$ با متغیر آزاد x_1 و یا فرمولی که متغیرهای آن از بین x_1، x_2، ...، $x_{|\varphi(x_1)|}$ انتخاب شود، عدد طبیعی n را تعریف می‌کند هرگاه:

$$PA \vdash \big(\varphi(x_1) \leftrightarrow x_1 = \overline{n}\big)$$

$\varphi(x_1)$ حداکثر یك عدد طبیعی را تعریف می‌کند. گرچه این فرض فطرتاً پارادوکس بِری به نظر می‌رسد. و هر عدد طبیعی را می‌توان در PA به این صورت تعریف کرد؛ در حقیقت تعداد نامتناهی از چنین تعاریفی وجود دارند.

گزاره ۲.۱.۳. *برای هر $n \in \mathbb{N}$، تعداد نامتناهی تعریف وجود دارد و یکی از این تعاریف طولی کمتر از $3(n+1)$ دارد.*

برهان. فرض کنید $n \in \mathbb{N}$. فرمول $x_1 = \overline{n}$، عدد n را تعریف می‌کند. چون

$$PA \vdash (x_1 = \overline{n} \leftrightarrow x_1 = \overline{n})$$

همچنین به یاد داریم $\overline{n} = S(S(...S(0)..)$ (که در آن S، n بار تکرار شده است) پس طول فرمول $x_1 = \overline{n}$، $3(n+1)$ است. □

توجه کنید برای هر فرمول راستگو $\psi(x_1)$ (مانند $\varphi(x_1) \to \varphi(x_1)$) فرمول $\psi(x_1) \wedge x_1 = \bar{n}$ نیز عدد n را تعریف می‌کند.

حال سؤال مطرح شده به سادگی در زیر قابل بیان است. کوتاهترین تعریف عدد n کدام است؟ واضح است که عدد n توسط فرمول $x_1 = \overline{n}$ تعریف می‌شود. امّا این تعاریف یکنواخت هستند و چگونگی ساخت عدد n را مطرح نمی‌کنند. حال نشان می‌دهیم کوتاهترین تعریف عدد n را نمی‌توان به‌طور محاسبه‌پذیر از n به دست آورد.

تعریف ۳.۱.۳. فرض کنید $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ توسط ضابطه زیر تعریف شود

$f(n) = min\{m : m = |\varphi(x_1)|$ و $\varphi(x_1)$ فرمولی با متغیر آزاد x_1 عدد n را تعریف می‌کند$\}$

قضیه ۴.۱.۳. *تابع f بازگشتی نیست.*

برهان. اگر تابع f بازگشتی باشد تابع $r(n) = (\mu y)[f(y) \geq 6n^2]$ نیز بازگشتی خواهد بود زیرا مقدار آن با محاسبه مقادیر $f(0)$ و $f(1)$ و... تا اینکه اوّلین عددی که در شرط $f(y) \geq 6n^2$ صدق کند، به دست می‌آید. از آنجایی که تعداد متناهی فرمول $\varphi(x_1)$ با طول کمتر از $6n^2$ وجود دارد، اگر همه متغیرها از بین متغیرهای x_1، x_2، ...، $x_{|\varphi(x_1)|}$ انتخاب شود (تعریف ۱.۱.۳ را ببینید)، این کار تحقق‌پذیر است. از تعریف r داریم: $\forall n \in \mathbb{N} \quad f(r(n)) \geq 6n^2$.

فرض کنید $\mathfrak{R}(x_2, x_1)$ نمایشگر تابع r در حساب پئانو باشد. اگر $r(k) = m$ آنگاه:

$$\forall k, m \in \mathbb{N} \quad PA \vdash \mathfrak{R}(\overline{k}, \overline{m})$$

و

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad PA \vdash (\exists! x_1)\mathfrak{R}(\overline{k}, x_1)$$

برقرارند. فرض کنید $p = |\Re(x_2, x_1)|$. پس $\Re(\overline{p}, x_1)$ تعریف $r(p)$ است. و همچنین

$$|\Re(\overline{p}, x_1)| \leq p + p(3p+1) = 3p^2 + 2p \leq 5p^2$$

از آنجا داریم $f(r(p)) \leq 5p^2$ و پس به سادگی $6p^2 \leq f(r(p)) \leq 5p^2$ نتیجه می‌شود و این غیر ممکن است. □

۲.۳ قضیه‌ی اوّل ناتمامیت

با توجه به پارادکس بِری، فرض کنید که فرمول $\varphi(x)$ در $\mathcal{L}_{PA}$ یک عدد $n \in \mathbb{N}$ را که n عدد صحیح یکتاست و در $\varphi(x)$ صدق می‌کند، تعریف کند. m_i را کوچک‌ترین عدد صحیح تعریف‌ناپذیر توسط فرمولی در $\mathcal{L}_{PA}$ با کمتر از $i \in \mathbb{N}$ نماد در نظر بگیرید. از آنجایی که چنین تعاریفی از m_iها نمی‌توانند مستقیماً توسط فرمولهایی در $\mathcal{L}_{PA}$ بیان شوند، نمی‌توانیم بگوییم m_i تعریف‌پذیر با کمتر از i نماد است، حتی اگر یک تعریف ساده و ابتدایی داشته باشید که با کمتر از i بخش نوشته شده باشد (یا i حرف یا غیره). با این وجود، بولوس نشان داد که اگر نظریه‌ی حسابِ درست به‌طور بازگشتی اصل‌پذیر باشد، $i \in \mathbb{N}$ وجود دارد به‌طوری که m_i با فرمولی دارای کمتر از i نماد در $\mathcal{L}_{PA}$ تعریف شده است. وجود چنین m_iای منجر به تناقض می‌شود. تفاوت بین اثبات ما و بولوس در تعبیر کلمه‌ی «تعریف» است.

تعریف ۱.۲.۳. فرض کنید $\varphi(\nu_0)$ یک فرمول در $\mathcal{L}_{PA}$ و n عضوی از $\mathbb{N}$ باشد. گوییم $\varphi(v_0)$، n را تعریف می‌کند اگر فرمول

$$\varphi(\bar{n}) \wedge (\forall x \forall y)\big(\varphi(x) \wedge \varphi(y) \to x = y\big)$$

در PA اثبات‌پذیر باشد.

توجه کنید که اگر PA سازگار باشد، هر فرمول در $\mathcal{L}_{PA}$ می‌تواند حداکثر یک عضو از $\mathbb{N}$ را تعریف کند. عدد گودل فرمول

$$\varphi(\bar{n}) \wedge (\forall x \forall y)\big(\varphi(x) \wedge \varphi(y) \to x = y\big)$$

را به‌صورت $\nu(\ulcorner\varphi(\nu_0)\urcorner, n)$ می‌نویسیم.

$\mathsf{P}(x,y)$ را Σ_1فرمولی قرار دهید که رابطه‌ی بازگشتی مقدماتی «x عدد گودل یک فرمول در $\mathcal{L}_{PA}$ با کمتر از y نماد می‌باشد، که متغیرهایش از میان $\nu_0, \nu_1, ..., \nu_{y-1}$ انتخاب می‌شوند و فقط ν_0 ممکن است آزاد باشد» را مشخص می‌کند. چون $\mathcal{L}_{PA}$ شامل حداکثر تعداد متناهی نماد غیر منطقی می‌باشد، برای اطمینان می‌توانیم فرض کنیم که برای هر $j \in \mathbb{N}$، n_j در $\mathbb{N}$ وجود دارد به‌طوری که

$$PA \vdash (\forall x)\big(\mathsf{P}(x,\bar{j}) \to x < \bar{n_j}\big)$$

فرمول $\mathsf{Q}(x,y)$ را برابر

$$(\exists z)\big(\mathsf{P}(z,y) \land \mathsf{Pr}_{PA}(\nu(z,x))\big)$$

و فرمول $\mathsf{R}(x,y)$ را برابر

$$\neg\mathsf{Q}(x,y) \land (\forall z < x)\mathsf{Q}(z,y)$$

تعریف می‌کنیم. توجه کنید هر دوی $(\forall z < x)\mathsf{Q}(z,y)$ و $\mathsf{Q}(x,y)$ معادل Σ_1 فرمول هستند و $\mathsf{R}(x,y)$ یعنی «کوچک‌ترین عدد تعریف‌ناپذیر توسط $\varphi(\upsilon_0)$ که در $\mathsf{P}(\ulcorner\varphi(\upsilon_0)\urcorner, y)$ هم صدق می‌کند». فرض می‌کنیم k تعداد نمادها در $\mathsf{R}(x,y)$ و $r = 10\times k$ باشد. آنگاه ϱ را ترم بسته‌ی $\bar{10}\times\bar{k}$ و $S(x)$ را فرمول $\mathsf{R}(x,\varrho)$ تعریف می‌کنیم. $S(x)$ یعنی «x کوچک‌ترین عدد صحیح تعریف‌ناپذیر در کمتر از r نماد است». در روشی مشابه با بولوس می‌توانیم ببینیم که تعداد نمادها در $S(x)$ کمتر از r است، پس عدد گودل s فرمول $S(\nu_0)$، در $\mathsf{P}(s,\varrho)$ صدق می‌کند. حال فرض می‌کنیم که PA سازگار باشد. از آنجا که تعداد فرمول‌ها در مجموعه‌ی

$$\{\, \varphi(\nu_0) : \mathsf{P}\big(\ulcorner\varphi(\nu_0)\urcorner, \varrho\big) \text{ درست است } \}$$

حداکثر n_r است و هر فرمول حداکثر یک عضو از $\mathbb{N}$ را تعریف می‌کند، حداقل یکی از $\{0,1,...,n_r\}$ توسط هیچ فرمول $\varphi(\nu_0)$ای در $\mathcal{L}_{PA}$ که در $\mathsf{P}(\ulcorner\varphi(\nu_0)\urcorner, \varrho)$ صدق کند، تعریف‌پذیر نیست. یعنی یک عدد صحیح $m < n_r$ در $\mathbb{N}$ وجود دارد به‌طوری که $\neg\mathsf{Q}(m,\varrho)$ درست است. فرض کنید m کوچک‌ترین عددی باشد که در این خاصیت صدق می‌کند. آنگاه m کوچک‌ترین عدد صحیح

تعریف‌ناپذیر با کمتر از r نماد است. به وضوح $(\forall z < m)\mathsf{Q}(z, \varrho)$، چون معادل با یک Σ_1 جمله‌ی درست است، در PA اثبات‌پذیر است.

قضیه ۳.۲.۲. (*قضیه‌ی اوّل ناتمامیت*)

(الف) اگر PA سازگار باشد، $\neg\mathsf{Q}(m, \varrho)$ در PA اثبات‌پذیر نیست.

(ب) اگر PA، ω-سازگار باشد، $\mathsf{Q}(m, \varrho)$ در PA اثبات‌پذیر نیست.

برهان. (الف) فرض کنید که $\neg\mathsf{Q}(m, \varrho)$ در PA اثبات‌پذیر باشد. چون $(\forall z < m)\mathsf{Q}(z, \varrho)$ در PA اثبات‌پذیر است، $PA \vdash S(m)$. همچنین

$$S(m) \wedge (\forall x \forall y)\big(S(x) \wedge S(y) \to x = y\big)$$

در PA اثبات‌پذیر است و بنابه قسمت (الف) نتیجه ۲.۴.۵ $PA \vdash \mathsf{Pr}_{PA}(\nu(s, m))$. چون $\mathsf{P}(s, \varrho)$ یک Σ_1جمله‌ی درست است، همچنین بنا به قسمت (الف) گزاره‌ی ۲.۴.۴ داریم $PA \vdash \mathsf{P}(s, \varrho)$. بنابراین، $(\exists x)\big(\mathsf{P}(x, \varrho) \wedge \mathsf{Pr}_{PA}(\nu(x, m))\big)$ در PA اثبات‌پذیر است، یعنی $PA \vdash \mathsf{Q}(m, \varrho)$. پس PA باید ناسازگار باشد، که متناقض با فرض است.

(ب) فرض کنید PA، ω-سازگار باشد و $\mathsf{Q}(m, \varrho)$ در PA اثبات‌پذیر باشد. چون $\mathsf{Q}(m, \varrho)$ یک Σ_1جمله است، بنا به قسمت دوّم گزاره‌ی ۲.۴.۴ $\mathsf{Q}(m, \varrho)$ درست است. و این متناقض با انتخاب m است. □

۳.۳ قضیه‌ی دوّم ناتمامیت

اثبات قضیه‌ی اوّل ناتمامیت به ما می‌گوید که در بعضی مدل‌های غیر استاندارد حساب پئانو، کوچک‌ترین عدد طبیعی تعریف‌ناپذیر در کمتر از r نماد ممکن است مساوی m نباشد. با استفاده از این مسئله و با توجه به قضیه‌ی تمامیت حسابی شده، قضیه‌ی دوّم ناتمامیت را اثبات خواهیم کرد. قضیه‌ی تمامیت حسابی شده می‌گوید هر نظریه‌ی سازگار به‌طور بازگشتی اصل‌پذیر، یک مدل به‌طور حسابی تعریف‌پذیر دارد.

کرایسل قضیه‌ی تمامیت حسابی شده را برای ساختن اثبات‌های نظریه‌ی مدلی از قضیه‌ی ناتمامیت به کاربرده است ([۱۳] و [۹] و [۸] را ببینید). در اثباتی که برای قضیه‌ی دوّم ناتمامیت می‌آوریم از نتیجه‌ی قضیه‌ی تمامیت حسابی شده استفاده می‌نماییم. این نتیجه به‌صورت قضیه‌ی زیر بیان شده که ما آن را در این پایان نامه بدون برهان می‌پذیریم (رجوع شود به [۸]).

قضیه ۱.۳.۳. *نظریه‌ی T را گسترشی به‌طور بازگشتی اصل‌پذیر از PA و همچنین $\mathfrak{M}_0$ را مدلی از $PA + \mathsf{Con}(T)$ می‌گیریم. در این صورت یك مدل $\mathfrak{M}_1$ از T وجود دارد به‌طوری که*

$(*)$ برای هر Σ_1 جمله‌ی φ در $\mathcal{L}_{PA}$ اگر $\mathfrak{M}_0 \models \varphi$ آنگاه $\mathfrak{M}_1 \models \varphi$.

گوییم مدل $\mathfrak{M}_1$ از T در مدل $\mathfrak{M}_0$ از $PA + \mathsf{Con}(T)$ تعریف‌پذیر است و همچنین می‌نویسیم $\mathfrak{M}_1 \prec_d \mathfrak{M}_0$ اگر $\mathfrak{M}_0$ و $\mathfrak{M}_1$ در شرط $(*)$ قضیه ۱.۳.۳ صدق کند.

لم ۲.۳.۳. *هرگاه $S(x)$ فرمول و عدد صحیح n_r تعریف شده در بخش قبل باشند، آنگاه*

$$PA \vdash \mathsf{Con}(PA) \to (\exists x \leq n_r)S(x)$$

برهان. چون Pr_{PA} در قاعده‌ی وضع مقدم صدق می‌کند، داریم

$$PA \vdash (\forall x)(\forall y \forall z)\big(\mathsf{Pr}_{PA}(\nu(x,\bar{y})) \wedge \mathsf{Pr}_{PA}(\nu(x,\bar{z})) \to \mathsf{Pr}_{PA}(\ulcorner \bar{y} = \bar{z} \urcorner)\big)$$

حال با استفاده از رابطه‌ی $PA \vdash \varphi \to \mathsf{Pr}_{PA}(\ulcorner \varphi \urcorner)$ برای Σ_1 فرمول φ داریم

$$PA \vdash \mathsf{Con}(PA) \to (\forall y \forall z)\big(\mathsf{Pr}_{PA}(\ulcorner \bar{y} = \bar{z} \urcorner) \to y = z\big)$$

بنابراین

$$PA \vdash \mathsf{Con}(PA) \to (\forall x)(\forall y \forall z)\big(\mathsf{Pr}_{PA}(\nu(x,\bar{y})) \wedge \mathsf{Pr}_{PA}(\nu(x,\bar{z})) \to y = z\big)$$

از اینرو با توجه به رابطه‌ی $PA \vdash (\forall x)(\mathsf{P}(x,\bar{j}) \to x < \bar{n_j})$ می‌توانیم نشان دهیم که،

$$PA \vdash \mathsf{Con}(PA) \to \neg \mathsf{Q}(0,\varrho) \vee \ldots \vee \neg \mathsf{Q}(n_r,\varrho)$$

به این ترتیب $\mathsf{Con}(PA) \to (\exists x \leq n_r)S(x)$ در PA اثبات‌پذیر است. $\square$

قضیه ۳.۳.۳. (قضیه‌ی دوّم ناتمامیت) *اگر PA سازگار باشد، آنگاه $\mathsf{Con}(PA)$ در PA اثبات نمی‌شود.*

برهان. فرض کنید PA سازگار بوده و $\mathsf{Con}(PA)$ از PA نتیجه می‌شود. آنگاه با استفاده از قضیه‌ی تمامیت، مدل $\mathfrak{M}_0$ از PA وجود دارد. از آنجا که

$$\mathfrak{M}_0 \models \mathsf{Con}(PA)$$

و با توجه به فرض $PA \vdash \mathsf{Con}(PA)$ با استفاده از لم ۲.۳.۳ یك m_0 در مجموعه‌ی $\{0, 1, 2, ., n_r\}$ وجود دارد به‌طوری که $\mathfrak{M}_0 \models S(m_0)$. آنگاه با توجه به رابطه‌ی

$$PA \vdash (\forall x)\big(\mathsf{Con}(PA) \to [S(x) \to \neg\mathsf{Pr}_{PA}(\ulcorner\neg\mathsf{Q}(\bar{x}, \varrho)\urcorner)]\big)$$

داریم

$$\mathfrak{M}_0 \models \neg\mathsf{Pr}_{PA}(\ulcorner\neg\mathsf{Q}(m_0, \varrho)\urcorner)$$

به این ترتیب

$$\mathfrak{M}_0 \models \mathsf{Con}(PA + \mathsf{Q}(m_0, \varrho))$$

بنابراین با استفاده از قضیه ۱.۳.۳ یك مدل $\mathfrak{M}_1$ از $PA+\mathsf{Q}(m_0, \varrho)$ وجود دارد که در شرط $(*)$ صدق می‌کند. دوباره با استفاده از لم ۲.۳.۳ ، m_1ای در مجموعه‌ی $\{0, 1, 2, ., n_r\}$ وجود دارد به‌طوری که $\mathfrak{M}_1 \models S(m_1)$. بعلاوه از آنجا که $(\forall x < m_0)Q(x, \varrho)$ یك جمله‌ی درست در $\mathfrak{M}_0$ است و معادل یك Σ_1جمله در حساب PA است و چون $\mathfrak{M}_1 \prec_d \mathfrak{M}_0$، در $\mathfrak{M}_1$ نیز درست است. پس

$$\mathfrak{M}_1 \models (\forall x \leq m_0)\mathsf{Q}(x, \varrho)$$

و از آنجا که $\mathfrak{M}_1 \models \neg\mathsf{Q}(m_1, \varrho)$. داریم $m_0 < m_1$ با تکرار این ساختار، به یك دنباله‌ی نامتناهی از مدل‌های حساب پئانو به شکل

$$\mathfrak{M}_0 \succ_d \mathfrak{M}_1 \succ_d \dots \succ_d \mathfrak{M}_i \succ_d \dots$$

و یك دنباله‌ی نامتناهی از اعداد صحیح به شکل

$$m_0 < m_1 < \dots < m_i < \dots$$

می‌رسیم. این موضوع با این که m_iها از $\{0, 1, 2, ., n_r\}$ انتخاب شده‌اند، در تناقض است. □

مراجع

[1] J. Barwise, *Remarks Introducing Article by Boolos*, Notices Amer. Math. Soc. **36**, 388 (1989).

[2] J. D. French, *The False Assumption Underlying Berry's Paradox*, G. Symbolic Logic **53**, 1220–1223 (1988).

[3] J. Barwise, J. Etchemendy, *The Liar: an Essay on Truth and Circularity*, Oxford University Press, Oxford, 1987.

[4] G. Boolos, *A New Proof of the Gödel Incompleteness Theorem*, Notices Amer. Math. Soc. **36**, 388–390(1989).

[5] T. Burge, Semantical paradox, *Recent Essays on Truth and the Liar Paradox*, Oxford University Press, Oxford, 1984, pp. 83–117.

[6] P. Hájek, P. Pudlák, *Mathematics of First-order Arithmetic*, Springer-Verlag Heidelberg 1998.

[7] M. Kikuchi, *A Note on Boolos's Proof of the Incompleteness Theorem*, Math. Logic Quarterly. **40**, 528–532 (1994).

[8] M, Kikuchi, and K. Tanaka, *On Formalization of Model-Theoretic Proofs of Gödel Theorem*, Notre Dame j. Form. Log. **35**, 403–412 (1994).

[9] G. Kreisel, *Notes on Arithmetical Models for Consistent Formula of the Predicate Calculus*, Found. Math. **37**, 265–285 (1950).

[10] C. Parsons, The liar paradox, *Recent Essays on Truth and the Liar Paradox*, (R. L. Martin, editor), Oxford University Press, Oxford, 1984, pp. 9–45.

[11] C. C. Pinter, *Set Theory*, Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, 1971.

[12] D. k. Roy, *The Shortest Definition of a Number in Peano Arithmetic*, Math. Log. Quart. **49**, 83–86 (2003).

[13] G. A. Smorynski, *The Incompleteness Theorem*, In: Handbook of Mathematical Logic (J. Barwise, editor.), North-Holland Publ. Amsterdam 1977, pp. 821–865.

[۱۴] م. صال مصلحیان، *فلسفه ریاضی (کلاسیک، مدرن، پست مدرن)* ، انتشارات واژگان خرد، ۱۳۸۴.

[۱۵] پ. قایمی، *پارادوکس آزمون ناگهانی و قضیه ناتمامیت دوم*، پایان‌نامه۱۳۹۳.

[۱۶] ض. موحد، *از ارسطو تا گودل*، انتشارات هرمس، ۱۳۸۷.

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

بازگشتی	Recursive
برهان	Proof
پارادوکس	Paradox
پارادوکس بِری	Berry’s paradox
پارادوکس دروغگو	Liar paradox
تناقض	Contradiction
جایگزینی	Substitution
زبان	Language
سازگار	Consistent
عددگودل	Gödel number
قضیه‌ی ناتمامیت گودل	Incompleteness theorem of Gödel
قطری‌سازی	Diagonalization
رمزنگاری	Encoding
متغیر آزاد	Free Variable
محاسبه‌پذیر	Computable
ناسازگار	Inconsistent
نتیجه	Conclusion
وضع مقدم	Modus Ponens

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

Recursive	بازگشتی
Proof	برهان
Paradox	پارادوکس
Berry’s paradox	پارادوکس بِری
Liar paradox	پارادوکس دروغگو
Contradiction	تناقض
Substitution	جایگزینی
Language	زبان
Consistent	سازگار
Gödel number	عددگودل
Incompleteness theorem of Gödel	قضیه‌ی ناتمامیت گودل
Diagonalization	قطری‌سازی
Encoding	رمزنگاری
Free Variable	متغیر آزاد
Computable	محاسبه‌پذیر
Inconsistent	ناسازگار
Conclusion	نتیجه
Modus Ponens	وضع مقدم

Surname: Shirzadeh **Name:** Hojjat

Title: The Shortest Definition of a Number in Peano Arithmetic

Supervisor: Saeed Salehi

Advisor: H. Mousavi

Degree: Master of Science **Subject:** Pure Mathematics

Field: Logic **University of Tabriz**

Faculty of Mathematical Sciences **Date:** 2014 **Number of Pages:** 36

Keywords: Berry's Paradox, Gödel's Incompleteness Theorems, Peano Arithmatic.

Abstract

The shortest definition of a number by a first order formula with one free variable is studied, where the notion of a formula defining a number extends a notition used by Boolos in his proof of the Incompleteness Theorem. This shortest definition of a number in PA is shown to be non-computable.

University of Tabriz

Faculty of Mathematical Sciences

DISSERTATION SUBMITTED IN PARTIAL FULFILLMENT OF THE REQUIREMENTS FOR THE DEGREE OF MASTER OF SCIENCE IN PURE MATHEMATICS (MATHEMATICAL LOGIC)

The Shortest Definition of a Number in Peano Arithmetic

Supervisor

Saeed Salehi

Advisor

H. Mousavi

by

Hojjat Shirzadeh

2014